弱双面外延集合论不一致

Peter Zhang
peterzhangsg@gmail.com

2026 年 11 月 18 日

摘要 我们证明了 Kisielewicz 的弱双面外延集合论（weak double extension set theory）DEST 不一致：仅混合外延性（mixed extensionality）与概括（comprehension）这两条公理就已互相矛盾. DEST 含有 $\in$ 与 ε 两种成员关系，可以解释 ZF，其一致性此前一直是开放问题.

Holmes 借助均质性（regularity）公理证明了两种关系下的序数并不相同：适当命名两种关系后，每个 ε-序数都是 $\in$-序数，而对象 $\mathrm{Ord} = \{x \mid x \text{ 是序数}\}$ 是 $\in$-序数，却不是 ε-序数. 我们首先证明了单凭概括就能驳倒这种不对称（asymmetry），而且这一证明在直觉主义逻辑中成立. 假设序数具有上述不对称. 令 V 为全集，$\Theta(z)$ 表示「z 漏掉了某个序数」，则对象

$$A = \{\, z \mid z = V \ \vee\ \mathrm{ord}(z) \ \vee\ \big(V \in z \wedge (z \in z \oplus \Theta(z))\big) \,\}$$

满足 $A \in A \leftrightarrow A \notin A$；同一论证可以驳倒一切在这个意义下不对称的公式. 接着，我们不用均质性公理，仅用混合外延性与概括推出了序数的不对称. 这一不对称的方向可能与 Holmes 的相反. 全文只有这一步用到经典逻辑. 两部分都已用 Agda 和 Lean 4 形式化. 另有一个不用经典逻辑的证明变体，作为附加代码形式化. 代码见 github.com/BedrockInstitute/DESTInconsistency.

1 理论

语言

带等词的一阶逻辑，另有两种成员关系 $\in$、ε，分别称为 $\in$ 侧与 ε 侧. 对任一侧 s，将这一侧的关系记为 $x \in_s y$，另一侧记为 s^*，并称 $F_s(a) = \{x : x \in_s a\}$ 为 a 的 s-面（s-face）. 若 $F_\in(a) = F_\varepsilon(a)$，即两面相同，则称 a 为均质（regular）对象.

齐一（uniform）公式

仅以 $\in$ 作为成员符号的公式. 它的 s-读法（s-reading）φ^s 把这个符号解释为 $\in_s$. 于是 $\varphi^\in = \varphi$，而 φ^ε 就是 Holmes 所说的 φ 的对偶 φ^*；另一侧也沿用这个星号.

ME（混合外延性，mixed extensionality）

若 $F_\in(x) = F_\varepsilon(y)$，则 $x = y$.

COMP（概括，comprehension）

对任意齐一公式 $\varphi(x, \bar{y})$ 与任意均质参数 $\bar{y}$，存在对象 $A = \{x \mid \varphi(x, \bar{y})\}$，使得

$$F_\varepsilon(A) = \{x : \varphi^\in(x, \bar{y})\}, \qquad F_\in(A) = \{x : \varphi^\varepsilon(x, \bar{y})\},$$

也就是说，对两侧 s 都有 $F_s(A) = \{x : \varphi^{s^*}(x, \bar{y})\}$，即 A 的 s-面由 φ 的 s^*-读法给出. 这种概括因此称为交叉概括. 下文用 $\{x \mid \cdots\}$ 表示由概括得到的对象，用 $\{x : \cdots\}$ 表示类，例如面；参数 $\bar{y}$ 不起作用时略去不写.

REG（均质性，regularity）
若对某一侧 s 有 $F_s(x) \subseteq F_s(y)$，且 y 两侧的成员都是均质对象，则 x 均质．

DEST 即 ME + COMP + REG [H05, §2]，[HFL, §8.1]．DEST$^-$ 即 ME + COMP．

关于表述　在 [H05] 中，公理 2.8 把「存在 $\{x \mid \varphi\}$」写在了参数的全称量词之前．我们按照 Holmes 在证明中的用法，将其读作「对一切均质参数，存在 A」；若按字面理解，这条公理本身就已不一致．Kisielewicz 在 [K98] 中削弱了他在 [K89] 中的理论．他没有单列 REG，而是通过参数条件把它并入 COMP：参数必须部分包含于某个合适的均质对象．这里 x 部分包含于 y，是指对某一侧 s 有 $F_s(x) \subseteq F_s(y)$*．Holmes [H04, §2] 指出，这与上面的写法等价．[HFL, §8.1] 与 [SEP, §10] 也正是按上面的写法，把这一理论列为开放问题．

2　不对称与结果

谓词「是序数」可以写成不带参数的齐一公式 ord．Holmes 的定义 [H05, §5] 含有一项 $\beta\ \varepsilon\ S$，其中参数 S 为 $\{x \mid x \text{ 有单元集}\}$；把这一项换成「$\beta$ 有单元集」，就得到这样的公式．第 4 节给出的是它的一个变体．Holmes 借助 REG 证明了：适当命名两种关系后，每个 ε-序数都是 $\in$-序数，而对象 $\mathrm{Ord} = \{x \mid \mathrm{ord}(x)\}$ 是 $\in$-序数，不是 ε-序数 [H05, 定理 5.1 及其后的讨论]．也就是说，Ord 只在一侧是序数．下面把所需性质提炼出来．

定义 [Agda · Lean]　设 $P(x)$ 是参数均质的齐一公式，b, c 为两侧．若下列三条都成立，则称 P 从 c 到 b 不对称（asymmetric from c to b）：

(i) $P^c(x)$ 蕴涵 $P^b(x)$；

(ii) 若 $P^b(x)$，则 x 的每个 b-成员 y 都不满足 $y \in_b y$；

(iii) 存在 W，满足 $F_b(W) = \{x : P^c(x)\}$、$F_c(W) = \{x : P^b(x)\}$ 且 $P^b(W)$．

由 COMP 可知，总存在 W 使 (iii) 中的两个等式成立；(iii) 还要求其中某个 W 满足 P^b．按这种命名，Holmes 的序数公式从 ε 到 $\in$ 不对称：(i) 与 (iii) 正是他的两条结论；(ii) 成立，因为序数没有属于自身的成员．

定理 1（对角） [Agda · Lean]　在 COMP 下，不存在不对称的公式．证明既不用 ME，也不用经典逻辑．

定理 2 [Agda · Lean]　在经典逻辑下 DEST$^-$ 不一致，因而 DEST 不一致．

定理 1 与序数的不对称合在一起，就能得出矛盾．序数的不对称有两种证法，任取其一即可．其一，Holmes 借助 REG 得到的两条结论给出了这种不对称，因此定理 1 已经驳倒完整的 DEST．其二，定理 2 的证明不用 REG，仅凭 ME 与 COMP 就推出序数从一侧到另一侧不对称，再由定理 1 得出矛盾．换用另一个序数公式，证明可以不用经典逻辑；这一变体只在

* 若这一条件还要求该均质对象的成员全是均质对象，就需要看证明用了哪些参数．定理 2 的证明所用参数只有两个例外，其余都是均质对象，且其成员也全是均质对象．一个例外是全集 V，可以消去：把 $z = V$ 换成 $\forall y\,(y \in z)$，把 $V \in z$ 换成 $\exists v\,(\forall y\,(y \in v) \wedge v \in z)$；由 ME，$s$-面为全域的对象只有 V．另一个例外是引理 4 证明中的 h：它均质，但其成员未必均质．把 (O4) 与命题 2 的 D 中的「有单元集」换成「有一个本身有单元集的单元集」，这一例外也可以消去：此时引理 4 的证明以 h 的单元集为参数，这个单元集均质，唯一的成员 h 也均质．所以按这种读法，理论在经典逻辑下同样不一致，见 `agda/Supplement.agda` 中的 `kisielewicz-strict`．

`agda/Intuitionistic.agda` 与 `lean/Intuitionistic.lean` 中给出，由它过渡到一阶直觉主义逻辑所需的条件见第 6 节．后文安排如下：第 3 节证明定理 1；第 4 节汇总均质对象与序数的若干事实；第 5 节据此推出序数的不对称，并完成定理 2 的证明．

3 概括驳倒不对称

定理 1 证明的最后一步只用到命题逻辑．引理 3 的证明也用到这一步，所以先把它写成引理．

引理 1（异或） [Agda · Lean] 设 $\varphi(z)$ 是齐一公式，对象 A 对两侧 s 都满足

$$A \in_s A \leftrightarrow \big(A \in_{s^*} A \oplus \varphi^{s^*}(A)\big),$$

其中 $\oplus$ 表示异或：$z \in z \oplus \varphi(z)$ 即 $(z \in z \wedge \neg\varphi(z)) \vee (z \notin z \wedge \varphi(z))$，右边是它在 A 处的 s^*-读法．则不存在一侧 s，使 $\varphi^s(A)$ 与 $\neg\varphi^{s^*}(A)$ 同时成立．

证明 设 $\varphi^s(A)$ 与 $\neg\varphi^{s^*}(A)$ 成立，则上式取 s 与取 s^* 时分别化为 $A \in_s A \leftrightarrow A \in_{s^*} A$ 与 $A \in_{s^*} A \leftrightarrow A \notin_s A$．若 $A \in_s A$，两式便给出 $A \notin_s A$，故 $A \notin_s A$．由此 $A \in_{s^*} A$，进而 $A \in_s A$，矛盾． □

定理 1 的证明 设 P 从 c 到 b 不对称，W 如 (iii) 所述．令 $V = \{x \mid x = x\}$，则它的两个面都是全域，因此 V 均质，且 $V \in_s V$．令 $\Theta(z)$ 为 $\exists u\,(P(u) \wedge u \notin z)$，并令

$$A = \{\, z \mid z = V \ \vee\ P(z) \ \vee\ \big(V \in z \wedge (z \in z \oplus \Theta(z))\big) \,\},$$

其中参数为 V 与 P 中的参数．于是 $z \in_b A$ 当且仅当条件的 c-读法在 z 处成立，$z \in_c A$ 当且仅当它的 b-读法成立．

1. 由 (ii) 可知 $P^b(V)$ 不成立，因为 $V \in_b V \in_b V$．又 $P^c(W)$ 不成立：否则由 (iii) 可得 $W \in_b W$，这与关于 W 的 (ii) 矛盾．
2. **$\Theta^b(A)$ 成立**，因为 $W \notin_b A$．在 W 处，条件的 c-读法中三个析取支都不成立：$P^b(W)$ 成立而 $P^b(V)$ 不成立，故 $W \neq V$；$P^c(W)$ 不成立；$V \in_c W$ 会由 (iii) 推出 $P^b(V)$，故也不成立．
3. **$\Theta^c(A)$ 不成立** 若 $P^c(u)$，则由 (i) 得 $P^b(u)$，从而 $u \in_c A$．
4. **在 $z = A$ 处只剩最后一支** 由第一支可知，$V \in_b A$ 且 $V \in_c A$．又 $A \neq V$，因为 $W \in_b V$ 而 $W \notin_b A$．由 (ii) 可知 $P^b(A)$ 不成立，因为 $V \in_b A$ 且 $V \in_b V$；再由 (i) 可知 $P^c(A)$ 也不成立．
5. 于是对两侧 s 都有 $A \in_s A \leftrightarrow (A \in_{s^*} A \oplus \Theta^{s^*}(A))$．由第 2、3 步，$\Theta^b(A)$ 成立而 $\Theta^c(A)$ 不成立，这与取 $\varphi = \Theta$ 应用引理 1 的结论矛盾．

这一证明与引理 1 的证明都不使用 ME，也不使用经典逻辑． □

注（对角论证为何有效） 罗素实例 $R = \{x \mid x \notin x\}$ 给出两个等价式：

$$R \,\varepsilon\, R \leftrightarrow R \notin R, \qquad R \in R \leftrightarrow \neg(R \,\varepsilon\, R).$$

两式合起来给出 $R \in R \leftrightarrow \neg\neg(R \in R)$，这并不矛盾：只要 $R \in R$ 与 $R \,\varepsilon\, R$ 一真一假，两式就都成立，结果只是 R 异质（irregular）．对角对象 A 则不同：$\Theta^b(A)$ 成立而 $\Theta^c(A)$ 不成立，于是引理 1 证明中的两式只剩一次否定，得 $A \in_b A \leftrightarrow A \notin_b A$，矛盾．

4 均质对象与序数

本节与下一节证明定理 2，全文只有这两节用到 ME 与经典逻辑．先列出关于均质对象的三条事实．

引理 2（刚性） [Agda · Lean] 若 g 均质且 $F_s(z) = F_s(g)$，则 $z = g$．

证明 $F_s(z) = F_s(g) = F_{s^*}(g)$，故由 ME 得 $z = g$． □

引理 3（翻转，[H05, 引理 2.11]） [Agda · Lean] 设 σ 是参数均质的齐一句子，则 $\sigma^{\in} \leftrightarrow \sigma^{\varepsilon}$．特别地，参数均质的齐一公式在每个均质对象处的两种读法一致．

证明 令 $A = \{x \mid x \in x \oplus \sigma\}$．由 COMP，对两侧 s 都有 $A \in_s A \leftrightarrow (A \in_{s^*} A \oplus \sigma^{s^*})$．取 $\varphi = \sigma$ 应用引理 1，可知不存在一侧 s 使 σ^s 与 $\neg\sigma^{s^*}$ 同时成立，故由经典逻辑得 $\sigma^{\in} \leftrightarrow \sigma^{\varepsilon}$． □

引理 4（单元集，[H05, 引理 2.10]） [Agda · Lean] 若 $F_s(h) = \{y\}$，则称 h 为 y 的 s-单元集．均质对象在两侧都有单元集；反之，两侧都有单元集的对象必定均质．

证明 前一结论只需对均质对象 r 取 $\{x \mid x = r\}$ 即可．至于后一结论，设 h 是 y 的 s-单元集，h' 是 y 的 s^*-单元集．按适当的顺序应用 ME，可得 $h = h'$，因此 h 的两个面都是 $\{y\}$，从而 h 均质．令 $k = \{x \mid \exists u\,(x \in u \wedge u \in h)\}$，则 $F_{s^*}(k) = F_s(y)$．由 ME 得 $y = k$，故 $F_{s^*}(y) = F_{s^*}(k) = F_s(y)$． □

定义 [Agda · Lean] $\mathrm{ord}(a)$ 为下列条件的合取，是一个不带参数的齐一公式：

(O1) $z \in y \wedge y \in a \to z \in a$；

(O2) a 的每个成员都满足 (O1)；

(O3) a 的成员都不属于自身；

(O4) a 的每个成员 y 都有单元集，即 $\exists h \forall v\,(v \in h \leftrightarrow v = y)$；

(O5) 对 a 的任意成员 y, z，有 $y \in z \vee y = z \vee z \in y$；

(O6) 对任意 C 及任意 $x \in a$，若 $x \notin C$，则存在 z 同时满足：$z = x$ 或 $z \in x$；$z \notin C$；z 的成员都在 C 中．

满足 ord^s 的对象称为 s-序数．在 ZF 中，ord 恰好定义了冯·诺依曼序数．

引理 5（序数） [Agda · Lean]

(1) s-序数的 s-成员是 s-序数．

(2) s-序数不是自身的 s-成员．

(3) 若 x 是 s-序数且 $x \notin_s C$，则存在 z 同时满足：$z = x$ 或 $z \in_s x$；$z \notin_s C$；$F_s(z) \subseteq F_s(C)$．

(4) 均质的 s-序数也是 s^*-序数．

证明 (1) 设 y 是 a 的成员．由 a 的 (O1)，y 的成员都是 a 的成员；于是 y 的 (O1) 即 a 的 (O2)，而 y 的 (O2)–(O6) 都可由 a 的相应条件推出．(2) 由 (O3) 即得．(3) 若 $F_s(x) \subseteq F_s(C)$，取 $z = x$．否则，对 x 的某个不在 C 中的成员应用 x 的 (O6)，再应用 x 的 (O1)．(4) 由引理 3 即得． □

引理 6（初始段） [Agda · Lean] 设 α 是 s-序数，γ 是均质对象，$F_s(\gamma) \subseteq F_s(\alpha)$，且由 $z \in_s y \in_s \gamma$ 可推出 $z \in_s \gamma$，则 $\gamma = \alpha$ 或 $\gamma \in_s \alpha$．

证明 若 $F_s(\alpha) \subseteq F_s(\gamma)$，则由引理 2 得 $\gamma = \alpha$．否则，取 $x \in_s \alpha$ 且 $x \notin_s \gamma$，对 α 应用 (O6) 并取 $C = \gamma$，可得 $z \in_s \alpha$、$z \notin_s \gamma$，且 $F_s(z) \subseteq F_s(\gamma)$．另一方面，设 $y \in_s \gamma$，则 $y \in_s \alpha$；由 (O5)，$y \in_s z$、$y = z$、$z \in_s y$ 三者必居其一，而后两种都会使 z 属于 γ．因此 $F_s(z) = F_s(\gamma)$，再由引理 2 得 $z = \gamma$，于是 $\gamma \in_s \alpha$． □

引理 7（可比性） [Agda · Lean] 设 α, β 是均质的 s-序数，则 $\alpha \in_s \beta$、$\alpha = \beta$、$\beta \in_s \alpha$ 三者必居其一．

证明 令 $\gamma = \{x \mid x \in \alpha \wedge x \in \beta\}$．它的 s-面与 s^*-面分别是 $F_{s^*}(\alpha) \cap F_{s^*}(\beta)$ 与 $F_s(\alpha) \cap F_s(\beta)$；由于 α, β 均质，二者相等．因此 γ 均质；又由 α, β 的 (O1) 可知，它满足引理 6 的条件．根据引理 6，$\gamma = \alpha$ 或 $\gamma \in_s \alpha$，且 $\gamma = \beta$ 或 $\gamma \in_s \beta$．若 $\gamma \in_s \alpha$ 且 $\gamma \in_s \beta$，则 $\gamma \in_s \gamma$，这与 α 的 (O3) 矛盾．其余三种组合恰好给出结论． □

5 序数的不对称

命题 1（一侧序数均质） [Agda · Lean] 若 c 侧只有均质序数，则 ord 从 c 到 c^* 不对称．

证明 记 $b = c^*$．

(i) 设 x 是 c-序数，则 x 均质，由引理 5(4) 可知 x 也是 b-序数．

(ii) 即 (O3)．

(iii) 令 $W = \{x \mid \mathrm{ord}(x)\}$，则 $F_b(W)$ 为全体 c-序数，$F_c(W)$ 为全体 b-序数．W 是 b-序数：它的 b-成员都是均质的 c-序数，从而是均质的 b-序数．下面逐条验证：

- (O1)：若 $z \in_b y \in_b W$，则由 y 均质得 $z \in_c y$；再由引理 5(1) 知 z 是 c-序数，因此 $z \in_b W$；
- (O2)、(O3)：成员都是 b-序数，用引理 5(2) 即得；
- (O4)：引理 4；
- (O5)：引理 7；
- (O6)：对成员 x 应用引理 5(3)． □

命题 2（两侧不能都有异质序数） [Agda · Lean] 两侧不可能同时存在异质序数．

证明 这一命题出自 [H05, 定理 5.1 后]，那里的证明用到 REG，这里不用．假设两侧都有．

1. **切割** 设 p 是异质的 s-序数，t 是均质的 s-序数，且 t 的 s-成员全是均质对象，则 $t \in_s p$．事实上，若均质的 s-序数 z 满足 $F_s(z) \subseteq F_s(p)$，则由引理 6 可得 $z = p$ 或 $z \in_s p$，引理的条件正是 z 的 (O1)；而 $z = p$ 会使 p 均质，所以 $z \in_s p$．若 t 有 s-成员不在 p 中，则对 t 应用 (O6) 并取 $C = p$，可得 $z \in_s t$、$z \notin_s p$，且 $F_s(z) \subseteq F_s(p)$；而 z 是均质的 s-序数，这不可能．所以 $F_s(t) \subseteq F_s(p)$，于是 $t \in_s p$．
2. **下降** 若存在异质的 s-序数 α，则存在异质的 s-序数 p，其 s-成员全是均质对象．
   - 令 $D = \{x \mid x \text{ 有单元集}\}$，则 $F_s(D)$ 由所有具有 s^*-单元集的对象组成．
   - 由 (O4) 知 α 的 s-成员都有 s-单元集；因此由引理 4，α 的 s-成员属于 $F_s(D)$ 当且仅当它均质．
   - 若 α 的 s-成员全是均质对象，则取 $p = \alpha$．否则存在异质的 $x \in_s \alpha$，满足 $x \notin_s D$．对 α 应用 (O6) 并取 $C = D$，可得 $z \in_s \alpha$、$z \notin_s D$，且 $F_s(z) \subseteq F_s(D)$．

- z 的 s-成员既在 α 中又在 D 中，因而都是均质对象．z 本身异质，否则 $z \in_s D$．由引理 5(1) 知 z 是 s-序数；取 $p = z$．

3. **结论**　由第 2 步，分别在 $\in$ 侧和 ε 侧取这样的 p 与 q．
   - p 的每个 $\in$-成员 x 都是均质的 $\in$-序数，由引理 5(4) 也是 ε-序数．由于 x 均质，它两侧的成员都是它的 $\in$-成员；再由 (O1)，这些成员都在 p 中，因而都是均质对象．由第 1 步，$x \,\varepsilon\, q$．
   - 对称地，q 的每个 ε-成员都是 p 的 $\in$-成员．
   - 所以 $F_{\in}(p) = F_{\varepsilon}(q)$，由 ME 得 $p = q$．于是 $F_{\varepsilon}(p) = F_{\in}(p)$，即 p 均质，矛盾． □

定理 2 的证明　由命题 2 与经典逻辑可知，某一侧 c 只有均质序数．再由命题 1，ord 从 c 到 c^* 不对称，这与定理 1 矛盾． □

注（用到的概括实例）　定理 2 的证明只用到 COMP 的八个实例，因此在经典逻辑下，ME 加上这八个实例就已不一致．下面列出这些实例，以及各自给出的对象和用处：

- $x = x$：全集 V，用于第 3 节；
- $x = r$，其中 r 均质：r 的单元集，用于引理 4 的证明；
- $\exists u\,(x \in u \wedge u \in h)$：引理 4 证明中的 k；
- $x \in x \oplus \mathrm{ord}(r)$：引理 3 证明中的 A，用于引理 5(4)；
- $x \in \alpha \wedge x \in \beta$：引理 7 证明中的 γ；
- 「x 有单元集」：命题 2 证明中的 D；
- $\mathrm{ord}(x)$：命题 1 证明中的 W；
- $P = \mathrm{ord}$ 时以 V 为参数的对角公式：第 3 节中的 A．

每个实例至多含两个参数，量词秩至多为 5．可见矛盾已经出现在概括的一个很小的片段中．这一点对寻找模型的意义见第 7 节．

注（ME 的用处）　定理 2 的证明只在两处对两个未知是否均质的对象使用 ME：引理 4 的后一结论，以及命题 2 的 $p = q$．事实上，在经典逻辑下，COMP 与下列三条已不一致：限于 x、y 之一均质的 ME，限于 x 的 $\in$-成员全均质的 ME，以及引理 4 的后一结论，见 `me-localized`．

6　验证

代码仓库为 `github.com/BedrockInstitute/DESTInconsistency`．定义、定理、引理和命题标题后的链接 [Agda · Lean] 指向其中的相应代码．

- **Agda**　版本为 2.8.0.2．证明写在单个文件 `agda/DESTInconsistency.agda` 中，不导入任何模块，文件头声明了 `--safe --without-K` 选项．信任部分有两块：一是文件的第 0–1 节，给出逻辑、语法、两种读法、公理和不对称的定义；二是文件第 4 节中的定理陈述．定理原文如下：

```
diagonal : (M : Set) (E : Rel M) → Comp M E →
           {k : ℕ} (P : Fm (suc k)) (ρ : Fin k → M) →
           ((i : Fin k) → Regular E (ρ i)) →
           {b c : Side} → Opp b c → ¬ Asymmetric E P ρ b c

inconsistent : (M : Set) (E : Rel M) → DEST⁻ M E → DNE → ⊥

DEST-inconsistent : (M : Set) (E : Rel M) → DEST M E → DNE → ⊥
```

其中 `DNE` 是双重否定消去，即经典逻辑；`diagonal` 既不使用 ME，也不使用 `DNE`．核对命令如下：

```
cd agda && agda --safe --no-libraries DESTInconsistency.agda
```

- **Lean 4** 版本为 v4.36.0，不依赖任何库．Lean 文件 `lean/DESTInconsistency.lean` 的结构与 Agda 文件相同，信任部分即第 I 部分和第 III 部分的定理陈述，原样列于附录 A．与 Agda 不同，关系取值于 `Prop`，COMP 只给出 ∃ 而不是 Σ．经典逻辑作为显式假设 `∀ P : Prop, ¬¬P → P` 出现在 `inconsistent` 与 `DEST_inconsistent` 中．用 `#print axioms` 查看，`diagonal`、`inconsistent`、`DEST_inconsistent` 都不依赖任何公理．`leanchecker` 是 Lean 自带的检查器，它重新核对了编译结果．独立内核 nanoda 0.4.17 在禁止使用任何公理的设置下，重新核对了这三个定理所依赖的全部 263 个声明．另有 `lean/Probes.lean` 核对了三件事：仅有 ME 与罗素实例时，存在单点模型；ME 与去掉参数均质限制的 COMP 不一致；若 COMP 改用同侧的读法，即要求 $F_s(A) = \{x : \varphi^s(x)\}$，则它本身就不一致．核对命令如下：

```
cd lean && lake build && lake env leanchecker DESTInconsistency
```

- **附加代码** 文件 `agda/Intuitionistic.agda` 与 `lean/Intuitionistic.lean` 给出第 2 节所说的变体，信任部分与主文件相同，只是没有经典逻辑的假设．用 `#print axioms` 查看，后者的三个定理都不依赖任何公理；nanoda 核对了它们所依赖的 267 个声明．文件 `agda/Supplement.agda` 证明第 1、5、8 节引用的三个定理，正文中这些定理名与第 2 节的两个文件名都链接到代码；它不导入任何模块，信任部分是主文件的第 0–1 节与序数公式、陈述所需的定义，以及三条陈述．Agda 文件的核对方法与主文件相同；`lake build` 也构建这个 Lean 文件，`leanchecker` 也重新核对了它．
- **盲测形式化** 两个彼此隔离的 Claude Opus 5.5 实例从零完成了 Agda 形式化，各自只看到自己的材料：一个是本论文的初稿，另一个是对角论证的一页摘要．两份都通过了 Agda 的类型检查．第二个实例发现，对角论证既不需要 ME，也不需要经典逻辑，由此引出了定理 1．该摘要收录于仓库的 `blind-test/diagonal-summary.zh.png`．第三个实例只看到本文第一版的第 1–5 节和第 2 节所说变体的草稿，从零用 Lean 4 形式化了它，其定理不依赖任何公理；它还发现草稿在切割一步漏写了引理 6 的条件．输入与形式化见 `blind-test/intuitionistic-input.md` 与 `blind-test/intuitionistic.lean`．
- **范围** `inconsistent` 与 `DEST_inconsistent` 断言：没有结构满足这些公理．要由此得出一阶理论不一致，还需用到完备性定理；这一步没有形式化．在 Lean 中，COMP 给出的 ∃ 只能用来证明命题，与一阶推导中的存在命题相同；在 Agda 中，Σ 则把每个见证作为参数的函数给出．要由 `lean/Intuitionistic.lean` 得出一阶理论在直觉主义逻辑下不一致，还需用到直觉主义逻辑对 Kripke 模型的完备性，以及 Lean 的逻辑对这类模型的可靠性．前者没有形式化，后者我们没有核对．

7 回顾与复盘

这一结果出自一个由 AI 辅助的研究项目．项目记录了四百多轮工作，原本的目标是证明 DEST 一致．

所需事实早已齐备 [H05] 的定理 5.1 及其后的讨论已经给出序数的不对称，而谓词「是序数」也可写成不带参数的齐一公式．项目把这种不对称视为模型必须容纳的现象，反复追问什么样的模型能容纳它，却很少反过来问：能否用一个概括实例，让这种不对称决定见证是否属于自身．

两个判断让项目绕开了这个问题

- 项目试图用公式识别最小的异质序数．这条路确实行不通，因为在某个异质序数上成立的公式，也会在某个均质序数上成立；而反驳只需要有某个序数被漏掉，无需知道是哪一个．
- 项目正确地证明了：若两侧用同一个布尔函数决定对象是否属于自身，则不会产生矛盾．但项目由此得出「单比特对角不能产生矛盾」这条规则．这条规则忽略了一点：同一个公式在每一侧读的是该侧的序数，所以两侧可以用不同的函数决定对象是否属于自身．

进展的度量用错了 多数轮次都在为越来越大的概括片段构造模型．但这并不能衡量离完整概括还有多远：两个公式可以在同一结构里各有见证，它们的合取却没有．人类主导者一再追问「统一的那一步在哪里」，指的就是这一差距．定理 2 的证明具体说明了这一点：它只用到 COMP 的八个实例，每个至多含两个参数，量词秩至多为 5，见其后的注．因此，任何能与 ME 一起有模型的概括片段，无论多大，都必须缺少这八个小实例中的至少一个．

僵局促成了外部审计 这些轮次主要由 Claude 完成．到第 401 轮，证明一致性的尝试已经陷入僵局．人类主导者于是请没有参与项目的 ChatGPT（Astra 6.2）担任外部审计者．Claude 为它写了一份可以独立阅读的交接简报：列出项目对卡点所在的各项判断，请它逐条裁定；并请它寻找 DEST 的模型或矛盾，或把一致性问题归约到已知的问题．

各部分从何而来 问题后来换成了这样的问法：能否有某个 A，使「我漏掉了本侧某个序数」这句话在 A 的两侧一真一假？换成这个问法之后，对角论证就出现了．对完整的 DEST，所需的序数事实都已见于 Holmes 的论文．外部审计先在不用 REG 的情况下推出了序数的不对称，随后找到了对角论证；定理 1 则来自第二次盲测．

8 展望

不一致并不意味着双面外延集合论的研究就此终结．被列为开放问题的那个理论已被否定，寻找一致的公理化反而比以往更难．自然的表述已被排除，必须先找到替代表述，再证明它一致．定理 1 指明了保留交叉概括的替代表述必须避免什么：不能有任何齐一公式不对称．若替代表述采用经典逻辑，保留 COMP，并在 z 也均质的情形保留引理 2，则它的两侧都有异质序数，见 `irregular-ordinals`；于是在这样的替代表述中，Ord 的哪一面都不恰由均质序数组成，对 ord 而言，Holmes 解释 ZF 所依据的断言 [H05, 断言 4.1] 在其中不成立，所以他对 ZF 的解释不能原样搬到这样的替代表述中．第 2 节所说的变体提示，改用直觉主义逻辑也避不开这一矛盾．每一次规避矛盾的尝试都可能让理论弱一些，但这不一定使它失去意义．我们认为，只要最终得到的理论被证明一致，仍能解释 ZF，仍有罗素对象 $\{x \mid x \notin x\}$ 这类基本的异质对象，且公理读起来自然、没有针对已知悖论打补丁的痕迹，它就有意义．

AI 使用声明

Peter Zhang 主导了这项研究：提出问题，把握方向，作出决定，并对内容负责．工作借助 AI 系统完成．项目证明一致性的尝试陷入僵局之后，ChatGPT（Astra 6.2，OpenAI）担任了外部审计者，经过见第 7 节．它在不用 REG 的情况下推出了序数的不对称，并找到了对角论证．Claude（Anthropic）审核并简化了论证，将其推广为定理 1，完成了 Agda 与 Lean 形式化，并起草了本文；其中大部分由 Claude Code 中的 Claude Opus 5.5 完成，三次盲测形式化则由相互隔离的 Claude Opus 5.5 实例完成．在这项研究中，Claude Opus 5.5 还找到了第 2 节所说的变体与 `agda/Supplement.agda` 中的三条结果；前者经其他 Claude Opus 5.5 实例的独立审稿和第三次盲测形式化核对．项目此前的轮次以证明一致性为目标，用到了 Claude 和其他 AI 系统．

参考文献

[H04] Holmes M R. Paradoxes in double extension set theories. Studia Logica, 2004, 77: 41–57

[H05] Holmes M R. The structure of the ordinals and the interpretation of ZF in double extension set theory. Studia Logica, 2005, 79: 357–372

[HFL] Holmes M R, Forster T, Libert T. Alternative set theories. In: Gabbay D M, Kanamori A, Woods J, eds. Sets and Extensions in the Twentieth Century. Handbook of the History of Logic, Vol 6. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2012: 559–632

[K89] Kisielewicz A. Double extension set theory. Rep Math Logic, 1989, 23: 81–89

[K98] Kisielewicz A. A very strong set theory? Studia Logica, 1998, 61: 171–178

[SEP] Holmes M R. Alternative axiomatic set theories. In: Stanford Encyclopedia of Philosophy. plato.stanford.edu/entries/settheory-alternative

附录 A　形式陈述

```
namespace DEST

-- Part I. Trusted part
inductive Side where
  | mem
  | eps

inductive Opp : Side → Side → Prop where
  | me : Opp .mem .eps
  | em : Opp .eps .mem

def cons {α : Type} {n : Nat} (x : α) (ρ : Fin n → α) : Fin (n + 1) → α
  | ⟨0, _⟩ => x
  | ⟨i + 1, h⟩ => ρ ⟨i, Nat.lt_of_succ_lt_succ h⟩

def nil {α : Type} : Fin 0 → α
  | ⟨_, h⟩ => absurd h (Nat.not_lt_zero _)
```

```
inductive Fm : Nat → Type where
  | mem : Fin n → Fin n → Fm n
  | eq  : Fin n → Fin n → Fm n
  | not : Fm n → Fm n
  | and : Fm n → Fm n → Fm n
  | or  : Fm n → Fm n → Fm n
  | imp : Fm n → Fm n → Fm n
  | all : Fm (n + 1) → Fm n
  | ex  : Fm (n + 1) → Fm n

def Sat {M : Type} (E : Side → M → M → Prop) (s : Side) :
    {n : Nat} → Fm n → (Fin n → M) → Prop
  | _, .mem i j, ρ => E s (ρ i) (ρ j)
  | _, .eq i j,  ρ => ρ i = ρ j
  | _, .not φ,   ρ => ¬ Sat E s φ ρ
  | _, .and φ ψ, ρ => Sat E s φ ρ ∧ Sat E s ψ ρ
  | _, .or φ ψ,  ρ => Sat E s φ ρ ∨ Sat E s ψ ρ
  | _, .imp φ ψ, ρ => Sat E s φ ρ → Sat E s ψ ρ
  | _, .all φ,   ρ => ∀ x : M, Sat E s φ (cons x ρ)
  | _, .ex φ,    ρ => ∃ x : M, Sat E s φ (cons x ρ)

def Regular {M : Type} (E : Side → M → M → Prop) (a : M) : Prop :=
  ∀ x : M, E .mem x a ↔ E .eps x a

def Comp (M : Type) (E : Side → M → M → Prop) : Prop :=
  ∀ {k : Nat} (φ : Fm (k + 1)) (ρ : Fin k → M), (∀ i : Fin k, Regular E (ρ i)) →
    ∃ A : M, ∀ x : M,
      (E .eps x A ↔ Sat E .mem φ (cons x ρ)) ∧ (E .mem x A ↔ Sat E .eps φ (cons x ρ))

structure DESTminus (M : Type) (E : Side → M → M → Prop) : Prop where
  ME : ∀ a b : M, (∀ x : M, E .mem x a ↔ E .eps x b) → a = b
  COMP : Comp M E

structure DEST (M : Type) (E : Side → M → M → Prop) : Prop where
  core : DESTminus M E
  REG : ∀ a b : M,
    ((∀ x : M, E .mem x a → E .mem x b) ∨ (∀ x : M, E .eps x a → E .eps x b)) →
    (∀ y : M, (E .mem y b ∨ E .eps y b) → Regular E y) →
    Regular E a

def Asymmetric {M : Type} (E : Side → M → M → Prop) {k : Nat}
    (P : Fm (k + 1)) (ρ : Fin k → M) (b c : Side) : Prop :=
  (∀ x : M, Sat E c P (cons x ρ) → Sat E b P (cons x ρ)) ∧
  (∀ x y : M, Sat E b P (cons x ρ) → E b y x → ¬ E b y y) ∧
  ∃ W : M, (∀ x : M, E b x W ↔ Sat E c P (cons x ρ)) ∧
           (∀ x : M, E c x W ↔ Sat E b P (cons x ρ)) ∧ Sat E b P (cons W ρ)
```

```
-- Part III. The theorems, statements only (Part II, the proofs, is omitted)
theorem diagonal (M : Type) (E : Side → M → M → Prop) (C : Comp M E)
    {k : Nat} (P : Fm (k + 1)) (ρ : Fin k → M)
    (rρ : ∀ i : Fin k, Regular E (ρ i))
    {b c : Side} (o : Opp b c) : ¬ Asymmetric E P ρ b c

theorem inconsistent (M : Type) (E : Side → M → M → Prop)
    (dne : ∀ P : Prop, ¬¬P → P) (T : DESTminus M E) : False

theorem DEST_inconsistent (M : Type) (E : Side → M → M → Prop)
    (dne : ∀ P : Prop, ¬¬P → P) (T : DEST M E) : False
```